

Capítulo 5

APLICAÇÕES LINEARES

Notação: Seja f uma função de X em Y , ou seja, $f: X \longrightarrow Y$

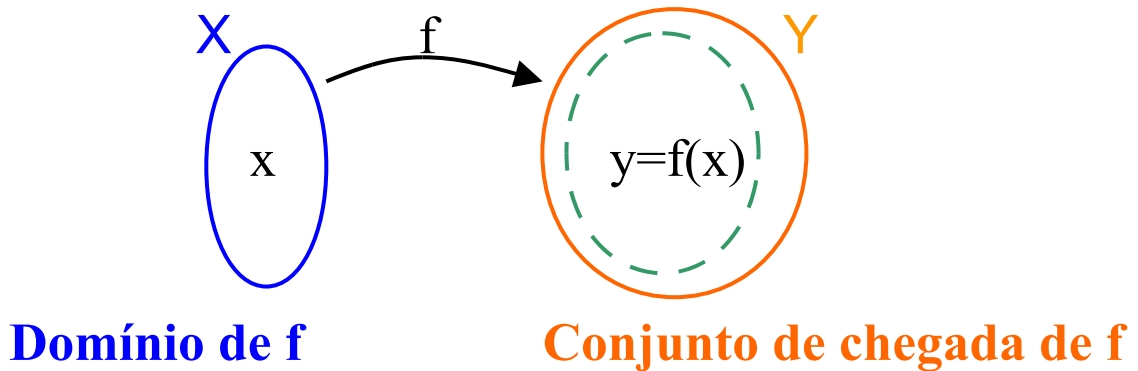


Imagem de f = Contradomínio de f = $\text{Im } f$ = conjunto das saídas dos elementos do domínio de f

Definição:

Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Diz-se que f é uma aplicação linear se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha x) = \alpha f(x),$
2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$

Observação: As duas propriedades anteriores podem escrever-se numa só

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Exemplos:

❶ A função f definida por

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x^2, y^2)$$

é linear?

2 A aplicação f definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2y, x) \end{aligned} \quad \text{é linear?}$$

Teorema:

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então

1. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dem:

Exercício1:

A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (y, x, 2) \end{aligned} \quad \text{é linear?}$$

Matriz Canónica de uma Aplicação Linear

Considere os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Qualquer vector de $\mathbb{R}^n$ se escreve como combinação linear de $e_1, e_2, \dots, e_n$ da seguinte forma:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n),$$

ou seja, a imagem de qualquer vector de $\mathbb{R}^n$, por f , pode escrever-se como combinação linear dos vectores $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.

Definição:

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Chamamos **matriz canónica** de f , e denotamo-la por M_f , a matriz cujas colunas são $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.

$$M_f = [f(e_1) \mid f(e_2) \mid \dots \mid f(e_n)]$$

Exemplo:

Seja

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, -z, x + z)$$

uma aplicação linear. Então

- $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$,
- $f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$,
- $f(0, 0, 1) = (0, -1, 1)$,

logo

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que serve a matriz de uma aplicação linear?

$$f(2, 3, 1) = ?$$

$$M_f \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = ?$$

Observação:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = M_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Isto significa que se nos derem a matriz canónica, M_f , de uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, através da igualdade anterior podemos obter:

- ❶ a imagem de um vector de $\mathbb{R}^n$ por f
- ❷ a expressão da aplicação f
- ❸ informação sobre se um dado vector de $\mathbb{R}^m$ pertence à $\text{Im } f$

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A imagem do vector $(1, 1, 0)$ por f é,

$$M_f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o vector $f(1, 1, 0) = (2, 0)$.

- A expressão da aplicação f é,

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y + z \\ -x + y + z \end{bmatrix},$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (2y + z, -x + y + z).$$

logo

- O vector $(1, 1) \in \text{Im } f$ porque o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

é tal que $r(A) = 2 = r([A|B]) < 3 = \text{número de incógnitas}$.
logo possível e indeterminado. Resolvendo,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \rightarrow -l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \rightarrow (l_1 + l_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, uma solução particular é $x = 0, y = 0, z = 1$. Ou seja, o vector $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ é tal que $f(0, 0, 1) = (1, 1)$.

Teorema:

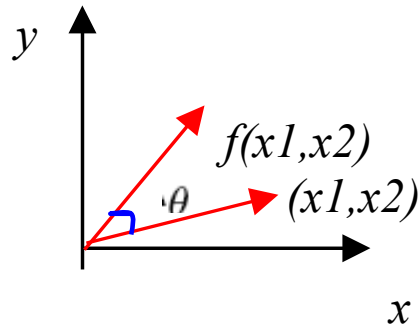
Seja A uma matriz de tipo $m \times n$. Então, existe uma, e uma só, aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cuja matriz canónica, M_f , é A .

Exemplo de aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

Rotações em torno da origem

Seja θ um ângulo. Consideremos a aplicação

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



que faz girar cada vector (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, em torno da origem, segundo um ângulo de amplitude θ , no sentido anti-horário. f é linear. Ora,

$$f(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad f(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

A sua matriz canónica, que denotamos por R_θ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então a matriz canónica da rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ é

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (-x_2, x_1) \end{aligned}$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, define-se

→ “Imagem de S por meio de f ”

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.


 “Imagem de f ”
 $Im\ f \subseteq \mathbb{R}^m.$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2, x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -2, 1) + x_2(-1, 2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -2, 1), (-1, 2, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, então $\text{Im } f = f(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

Definição:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

Chama-se **núcleo** de f e denota-se por $Nuc\ f$ ou $Ker\ f$, o conjunto

$$Nuc\ f = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$



“Núcleo de f ”

$$Nuc\ f \subseteq \mathbb{R}^n$$

Observação:

Sendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, repare-se que os conjuntos

$$Nuc\ f = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$$

$$Im\ f = \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

são distintos. Enquanto que $Im\ f$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $Nuc\ f$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: Seja

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} Nuc\ f &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = (0, 0)\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2) = (0, 0)\}. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo vem $x_1 = x_2$. Logo,

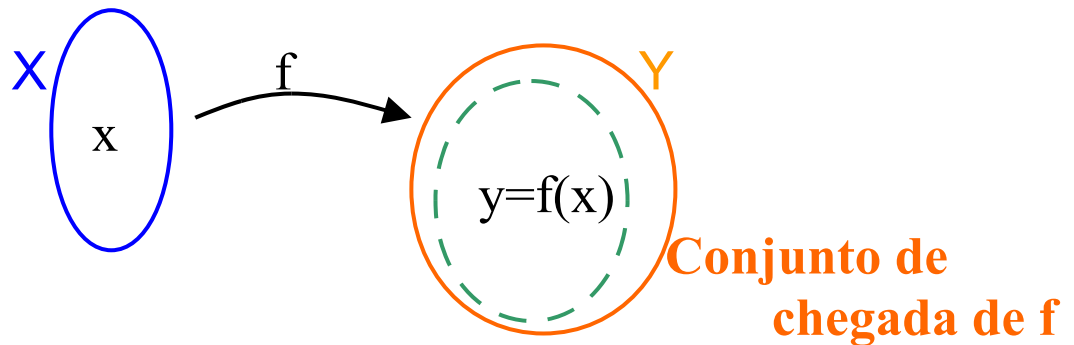
$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Observação:

$\text{Nuc } f$ é um subespaço do conjunto de partida.

Aplicações Lineares Injectivas, Sobrejectivas e Bijectivas

Seja f uma função de X em Y , ou seja, $f: X \longrightarrow Y$



Domínio de f

- f é **injectiva** se

$$\forall x, x' \in X, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

ou seja, f é injectiva se elementos diferentes de X têm imagens diferentes.

- f é **sobrejectiva** se

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in X, \quad f(x) = y$$

isto é, f é sobrejectiva se qualquer elemento de Y é imagem, por f , de algum elemento de X .

- f é **bijectiva** se f é injectiva e sobrejectiva, isto é,

$$\forall y \in Y, \quad \exists^1 x \in X, \quad f(x) = y$$

Proposição: (Injectividade em Operadores Lineares)

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então

f é injectiva se, e só se, $\text{Nuc } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Dem:

Exemplo:

❶ Seja

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2).$$

Como,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle \end{aligned}$$

então f não é injectiva.

❷ Seja

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_2, 0).$$

Como,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_2, x_2, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0, x_2 = 0, 0 = 0\} \\ &= \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

então f é injectiva.

Qual a Relação da Injectividade e Sobrejectividade com a Matriz Canónica de uma Aplicação Linear?

Observação:

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação linear e M_f a matriz canónica de f

- f é injectiva $\Leftrightarrow \text{Nuc } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$ o sistema homogéneo $M_f X = 0$ é possível e determinado
- f é sobrejectiva $\Leftrightarrow$ todo o elemento de $\mathbb{R}^m$ é imagem por f
 de algum elemento de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ o sistema $M_f X = B$ é possível,
 qualquer que seja a matriz coluna B cujo vector está em $\mathbb{R}^m$

Consequências: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação linear

- 1 Se $n > m$, então f não é injectiva; (pode ser sobreject. ou não)
- 2 Se $m > n$, então f não é sobrejectiva (pode ser inject. ou não)
- 3 Se $m=n$, então f é injectiva se, e só se, f é sobrejectiva.

Exercício2: Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, z, 0).$$

a) É sobrejectiva? b) É injectiva?

Proposição:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

1. Se $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$, então
 $f(W) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$.
2. Se f é injectiva e S é um conjunto de vectores linearmente independentes, de $\mathbb{R}^n$, então, $f(S)$ é um conjunto de vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^m$.

Composição de Aplicações Lineares

Considere as aplicações lineares

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C.$$

Tem-se,

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$



$$g \circ f$$

Composição g após f

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Proposição:

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ forem duas aplicações lineares, então a aplicação $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação linear.

Dem:

Qual a relação entre as matrizes canônicas?

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \rightsquigarrow M_f \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k \rightsquigarrow M_g$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \rightsquigarrow M_{g \circ f}$$

? Há relações?

Proposição:

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ duas aplicações lineares cujas matrizes canônicas são M_f e M_g . Então, a matriz canônica de $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é obtida por

$$M_{g \circ f} = M_g M_f.$$

Dem:

Exemplo:

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação em torno da origem, segundo o ângulo de amplitude θ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação em torno da origem, segundo o ângulo de amplitude ρ .

As matrizes canônicas de f e g são

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_\rho = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix}.$$

A composição $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação linear que tem a matriz canônica

$$\begin{aligned} M_{g \circ f} &= R_\rho R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos (\rho + \theta) & -\sin (\rho + \theta) \\ \sin (\rho + \theta) & \cos (\rho + \theta) \end{bmatrix} = R_{\rho + \theta}, \end{aligned}$$

ou seja, $g \circ f$ é a rotação em torno da origem segundo o ângulo de amplitude $(\rho + \theta)$.

Aplicações Lineares Invertíveis

Sejam A, B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação. Dizemos que f é **invertível** se existir uma aplicação $g : B \longrightarrow A$ tal que

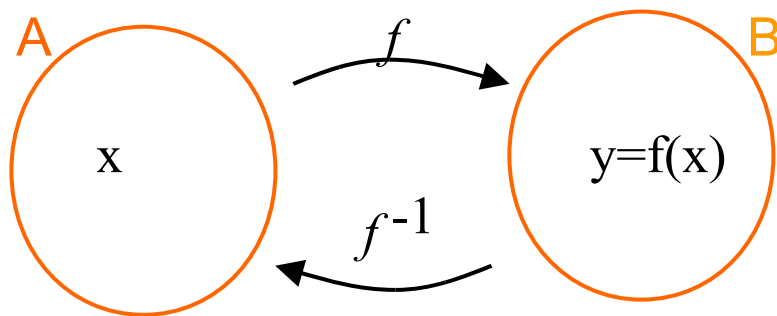
$$f \circ g = id_B, \quad g \circ f = id_A$$

em que

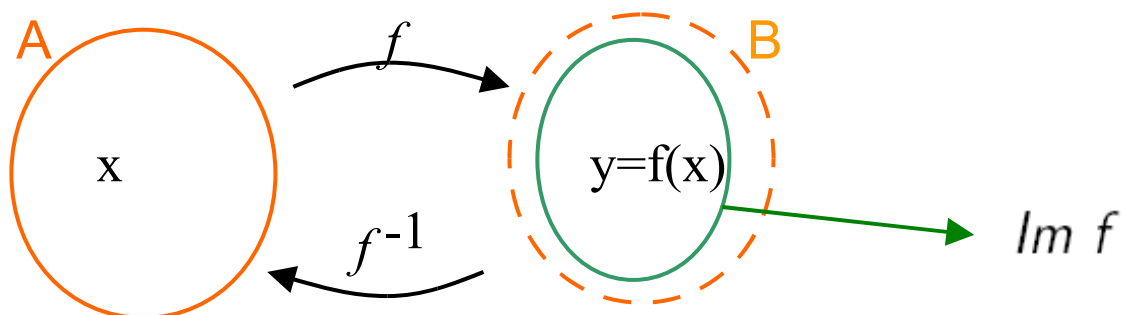
$$id_B : \begin{matrix} B \longrightarrow B \\ x \mapsto x \end{matrix}, \quad id_A : \begin{matrix} A \longrightarrow A \\ x \mapsto x \end{matrix}$$

Observação:

- ① $f : A \longrightarrow B$ é uma aplicação invertível se, e só se, f é bijectiva.
- ② À aplicação g tal que $g \circ f = id$, $f \circ g = id$ chama-se a inversa de f e representa-se por f^{-1} .



- ③ Se $f : A \longrightarrow B$ é injetiva, então $f : A \longrightarrow Im f$ é bijectiva, pelo que existe $f^{-1} : Im f \longrightarrow A$.



Teorema:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Se a matriz canónica, M_f , de f é invertível então

1. f é invertível.
2. a matriz canónica de f^{-1} é $M_{f^{-1}}$, isto é $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$.